

# PEMECAHAN SISTEM PERSAMAAN LINIER NON HOMOGEN DENGAN METODE SAPUAN GANDA CHOLESKY

Oleh : Yusup  
Fakultas Ilmu Komputer, Universitas AKI Semarang

## Abstract

*The fraction of Non Homogen Linearity Adjustment System toward Cholesky Double Sweeping Method is by substituting the grade of  $x_{i-1}$  in  $i$  row of linearity adjustment system. After that it counts the coeficiency of  $P_i$  and  $Q_i$  from grade  $i = 1$  to  $i = n$ , as the first sweeping step. As it reaches  $n$  point, the calculation is conducted on the contrary, that is from  $n$  to  $1$ , to count unknown  $x_i$  number.*

*Keywords : Tridiagonal Matrix, Linear Equation Systems, Cholesky.*

## Pendahuluan

Persamaan Linier sering dipakai dalam proses analisis, desain dan sintesis dari sistem perkerayaan. Sebuah Sistem Persamaan Linier yang terdiri dari  $m$  buah persamaan linier dengan  $n$  buah bilangan yang tidak diketahui dapat dinyatakan dengan :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

dimana  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah bilangan-bilangan yang tidak diketahui dan  $a, b$  menyatakan kontanta-konstanta.

Dan apabila Sistem Persamaan Linier tersebut dinyatakan dengan perkalian matriks  $AX = B$ , maka dapat dinyatakan dengan :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

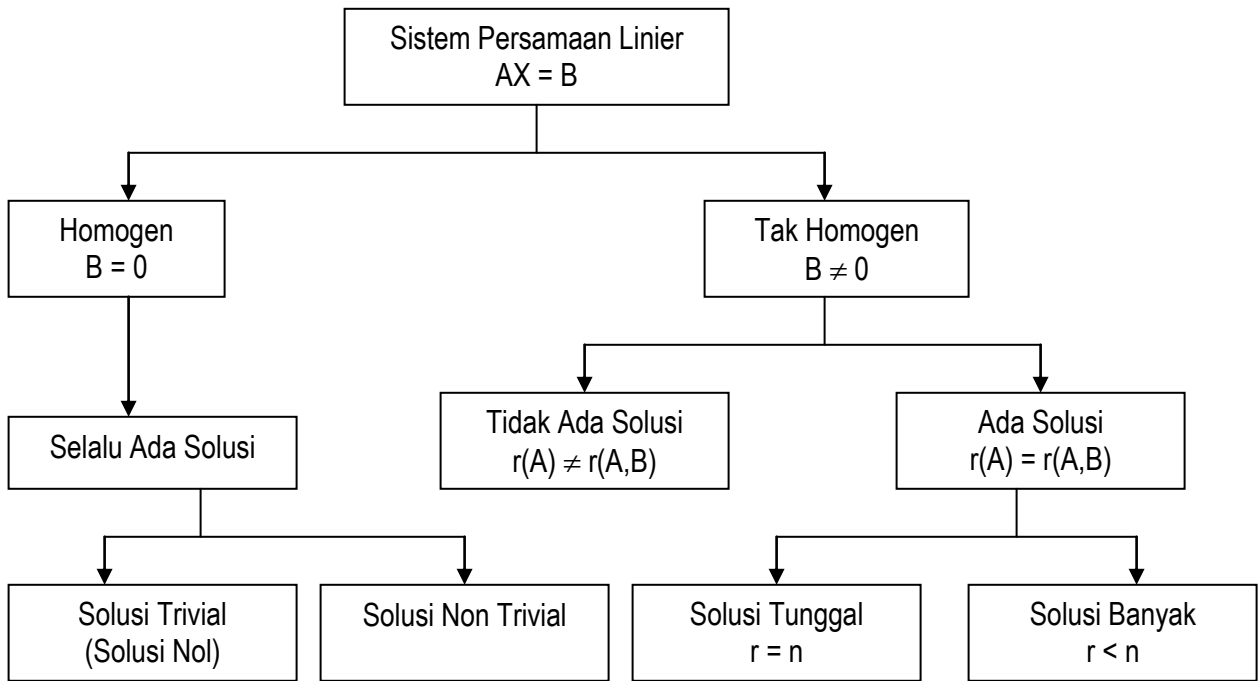
Jika  $B = 0$  (matriks nol) maka Sistem Persamaan Linier itu disebut dengan Sistem Persamaan Linier Homogen. Sedangkan jika  $B \neq 0$ , maka Sistem Persamaan Linier tersebut disebut dengan Sistem Persamaan Linier Non Homogen. Persamaan Linier tersebut akan mempunyai 3 (tiga) kemungkinan penyelesaian, yaitu :

- a. Penyelesaian yang unik, jika  $A \neq 0$ ,

- b. Tidak mempunyai penyelesaian jika  $A = 0$  dan  $B \neq 0$ ,
- c. Penyelesaian lebih dari satu jika  $A = 0$  dan  $B = 0$ .

Penyelesaian (Solusi) dari Sistem Persamaan Linier tersebut adalah jika terdapat himpunan bilangan  $k_1, k_2, \dots, k_n$  yang merupakan nilai dari variabel-variabel yang tidak diketahui ( $x$ ), dan

berlaku  $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ , sehingga semua persamaan linier terpenuhi. Solusi tersebut dapat disajikan dalam bentuk vektor yang disebut dengan vektor solusi. Bagan berikut ini memudahkan untuk mendapatkan gambaran secara umum tentang Sistem Persamaan Linier.



Gambar 1. Gambaran Umum Sistem Persamaan Linier

Dimana :  
 $n$  = jumlah variabel yang tidak diketahui.  
 $r$  = rank matriks.  
 Pandang matriks  $A$  berordo  $(m \times n)$  dengan elemen-elemennya bilangan riil :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tiap-tiap baris (kolom) dari matriks  $A$  dapat dipandang sebagai vektor-vektor baris (kolom) dari  $A$ , yang akan



$$a_2 \left( -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} \right) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2$$

$$\text{atau } \left( -\frac{a_2 c_1}{b_1} + b_2 \right) x_2 = -c_2 x_3 + (d_2 -$$

$$a_2 \frac{d_1}{b_1})$$

dapat pula ditulis sebagai:  $x_2 = P_2 x_3 + Q_2$

$$\text{dengan } P_2 = -\frac{c_2}{\left( -\frac{a_2 c_1}{b_1} + b_2 \right)} \text{ dan } Q_2 =$$

$$\frac{d_2 - a_2 \frac{d_1}{b_1}}{\left( -\frac{a_2 c_1}{b_1} + b_2 \right)}, \text{ persamaan ini}$$

menunjukkan bahwa  $x_2$  merupakan fungsi dari  $x_3$ , langkah seperti tadi dapat diulangi lagi untuk semua baris pada persamaan berikutnya. Dengan demikian setiap bilangan tak diketahui dapat dinyatakan sebagai bilangan tak diketahui berikutnya.

Misalnya telah diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$x_{i-1} = P_{i-1} x_i + Q_{i-1}$$

Apabila nilai  $x_{i-1}$  disubstitusikan ke dalam baris ke  $i$  dari sistem persamaan (1), maka:

$$a_i (P_{i-1} x_i + Q_{i-1}) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$(a_i P_{i-1} + b_i) x_i + c_i x_{i+1} = d_i - (a_i Q_{i-1})$$

$$x_i = -\frac{c_i}{(a_i P_{i-1} + b_i)} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{(a_i P_{i-1} + b_i)}$$

Persamaan tersebut di atas dapat ditulis dalam bentuk:

$$x_i = P_i x_{i+1} + Q_i \quad (3a)$$

$$\text{dengan: } P_i = -\frac{c_i}{(a_i P_{i-1} + b_i)} \text{ dan}$$

$$(3b)$$

$$Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{(a_i P_{i-1} + b_i)} \quad (3c)$$

Untuk  $i = 1$ , maka persamaan (3a), menjadi:

$$x_1 = P_1 x_2 + Q_1 \quad (4a)$$

$$\text{dengan: } P_1 = -\frac{c_1}{(a_1 P_0 + b_1)} \text{ dan } (4b)$$

$$Q_1 = \frac{d_1 - a_1 Q_0}{(a_1 P_0 + b_1)} \quad (4c)$$

Perbandingan persamaan (4) dan (2), menunjukkan bahwa:

$$P_0 = 0 \text{ dan } Q_0 = 0 \quad (5)$$

Persamaan (4) dan (5), memungkinkan untuk menghitung koefisien  $P_i$  serta  $Q_i$  dari nilai  $i = 1$  sampai  $i = n$ , langkah ini merupakan sapuan pertama. Setelah sampai titik ke  $n$  hitungan dilakukan dalam arah kebalikannya, yaitu dari  $n$  ke 1, untuk menghitung bilangan tak diketahui  $x_i$ .

Untuk itu persamaan terakhir dari sistem persamaan (1) ditulis dalam bentuk:

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \quad (6)$$

Pada sistem persamaan (3), apabila  $i = n - 1$ , maka:

$$x_{n-1} = P_{n-1} x_n + Q_{n-1} \quad (7)$$

Substitusi dari persamaan (7) ke dalam persamaan (6), akan memberikan:

$$a_n(P_{n-1} x_n + Q_{n-1}) + b_n x_n = d_n$$

$$(a_n P_{n-1} + b_n) x_n = d_n - a_n Q_{n-1}$$

$$x_n = \frac{d_n - a_n Q_{n-1}}{(a_n P_{n-1} + b_n)}$$

Sesuai dengan persamaan (3a), maka:

$$x_n = Q_n.$$

Nilai  $x_n$  dapat diperoleh, berdasarkan nilai  $x_n$  yang didapat maka nilai  $x_{n-1}$  dapat dihitung pula dengan persamaan sebagai berikut:  $x_{n-1} = P_{n-1} x_n + Q_{n-1}$ .

Dari nilai  $x_{n-1}$  kemudian dihitung nilai  $x_{n-2}$ ,  $x_{n-3}$ , dan seterusnya hingga ke nilai  $x_1$ .

Contoh soal:

Selesaikan sistem persamaan berikut ini dengan menggunakan metode sapuan ganda.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -10 \\ 6x_2 - 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_3 - 3x_4 &= 13 \end{aligned} \quad (c1)$$

**Penyelesaian:**

Sistem persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks tridiagonal, yang penyelesaiannya dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan berikut:

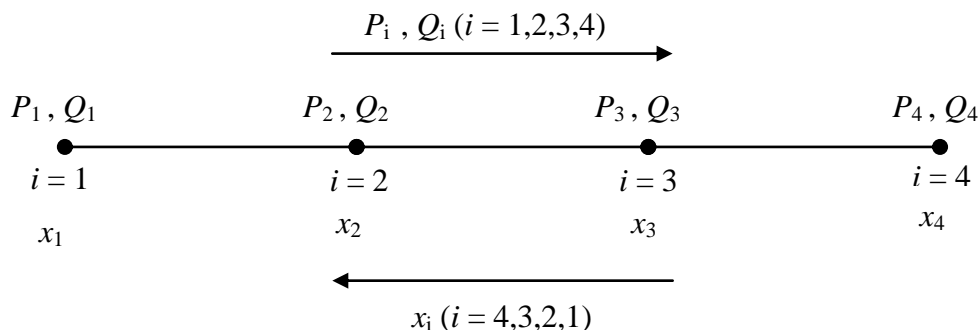
$$x_i = P_i x_{i+1} + Q_i \quad (c2)$$

dengan:  $P_i = -\frac{c_i}{(a_i P_{i-1} + b_i)}$  dan

(c3)

$$Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{(a_i P_{i-1} + b_i)} \quad (c4)$$

Skema penyelesaian sistem persamaan dengan metode sapuan ganda sebagai berikut:



Langkah pertama dihitung nilai  $P_i$  dan  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) dari kiri ke kanan. Setelah sampai ke titik  $i = n = 4$ , dihitung nilai  $x_n = Q_n$ . Berdasarkan nilai  $x_n$  tersebut, kemudian hitungan dilanjutkan dari kanan ke kiri untuk mendapatkan nilai  $x_i$  ( $i = 4, 3, 2, 1$ ).

- a) Menghitung koefisien  $P_i$  dan  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

Koefisien  $P_i$  dan  $Q_i$  dihitung dengan menggunakan persamaan (c3) dan (c4), berdasarkan sistem persamaan (c1).

Untuk  $i = 1, P_0 = 0$  dan  $Q_0 = 0$ .

$$P_1 = -\frac{c_1}{(a_1 P_0 + b_1)} = -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{1}{2} = -0,5.$$

$$Q_1 = \frac{d_1 - a_1 Q_0}{(a_1 P_0 + b_1)} = \frac{7 - 0}{(0 + 2)} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Untuk  $i = 2, P_1 = -0,5$  dan  $Q_1 = 3,5$ .

$$P_2 = -\frac{c_2}{(a_2 P_1 + b_2)} = -\frac{-3}{(1(-0,5) + 1)} = 6.$$

$$Q_2 = \frac{d_2 - a_2 Q_1}{(a_2 P_1 + b_2)} = \frac{(-10) - 1(3,5)}{(1(-0,5) + 1)} = \frac{-13,5}{0,5} = -27.$$

Untuk  $i = 3, P_2 = 6$  dan  $Q_2 = -27$ .

$$P_3 = -\frac{c_3}{(a_3 P_2 + b_3)} = -\frac{1}{(6(6) + (-2))} = -\frac{1}{34} = -0,02941.$$

$$Q_3 = \frac{d_3 - a_3 Q_2}{(a_3 P_2 + b_3)} = \frac{7 - (6(-27))}{(6(6) + (-2))} = \frac{169}{34} = 4,97059.$$

Untuk  $i = n = 4, P_n = 0$  dan  $Q_n =$

$$\frac{d_n - a_n Q_{n-1}}{(a_n P_{n-1} + b_n)}, \text{ maka:}$$

$$x_4 = Q_4 = \frac{d_4 - a_4 Q_3}{(a_4 P_3 + b_4)} = \frac{13 - (2(4,97059))}{(2(-0,02941) + (-3))} = \frac{3,05882}{-3,05882} = -1,00.$$

Setelah nilai  $P_i$  dan  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) didapat, lalu dihitung nilai  $x_i$  ( $i = 4, 3, 2, 1$ ).

- b) Menghitung  $x_i$  ( $i = 4, 3, 2, 1$ )

Variabel  $x_i$  ( $i = 4, 3, 2, 1$ ) dihitung dengan menggunakan persamaan (c2):

$$x_i = P_i x_{i+1} + Q_i$$

Untuk  $i = 4$ , maka  $x_4 = Q_4 = -1,00$ .

Untuk  $i = 3$ , maka  $x_3 = P_3x_4 + Q_3 = (-0,02941(-1,00)) + 4,97059 = 5,00$ .

Untuk  $i = 2$ , maka  $x_2 = P_2x_3 + Q_2 = (6(5,00)) + (-27) = 3,00$ .

Untuk  $i = 1$ , maka  $x_1 = P_1x_2 + Q_1 = (-0,5(3,00)) + 3,5 = 2,00$ .

Dengan demikian hasil yang diperoleh adalah:

$x_1 = 2,00$ ;  $x_2 = 3,00$ ;  $x_3 = 5,00$ ;  
 $x_4 = -1,00$ .

Untuk mengetahui benar atau tidaknya hasil yang diperoleh, maka nilai-nilai tersebut dimasukkan ke dalam persamaan yang telah diselesaikan.

$2(2,00)$	$+ 3,00$		$= 7$	$(= 7)$
$2,00$	$+ 3,00$	$- 3(5,00)$	$= -10$	$(= -10)$
	$6(3,00)$	$- 2(5,00) + (-1,00)$	$= 7$	$(= 7)$
		$2(5,00) - 3(-1,00)$	$= 13$	$(= 13)$

#### Daftar Pustaka

Chapra Steven C, Canale Raymond P, 2006, *Numerical Methods for Engineers*, Fifth Edition, Mc Graw Hill Inc, New York.

Charles G. Cullen (alih bahasa oleh Bambang Sumantri, Ir.), 1993, *Aljabar Linier dengan Penerapannya*, PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

202.91.15.14/upload/files/4460 Bab 2.doc  
(Senin, 10 januari 2011)